

# CURRICULUM VITAE DI PATRIZIA DANIELE

## Contatti

Patrizia Daniele  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Catania  
Viale A. Doria, 6 – 95125 Catania  
Tel. +39 095 7383064 – Fax +39 095330094  
e-mail: daniele@dmi.unict.it  
www.patriziadaniele.com

## Curriculum Vitae

La Prof.ssa Patrizia Daniele è nata ad Augusta (SR) il 14 Aprile 1973.

Nel 1991 ha conseguito il Diploma di Maturità Scientifica presso il Liceo Scientifico “A. Saluta” di Augusta con voti 60/60.

Il 15 Luglio 1995 ha conseguito la laurea in Matematica presso l’Università degli Studi di Catania riportando la votazione di 110/110 e lode, discutendo la tesi “Disequazioni Variazionali e Dualità”, relatore Prof. Antonino Maugeri.

Dal 15 Luglio 1995 al 15 Novembre 1995 ha svolto l’attività di consulente professionale per l’approfondimento della Teoria Lagrangiana, della Teoria della Dualità, della Teoria del minimax in relazione alla ricerca di formulazioni duali più generali del problema dell’equilibrio del traffico, Università di Pisa.

Nel Marzo 2000 ha conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica Applicata ed Informatica presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II.

È risultata vincitrice di un concorso nazionale per un assegno di ricerca della durata di quattro anni presso la Facoltà di Scienze Mat. Nat. Fis., Università degli Studi di Catania, dal titolo "Calcolo delle variazioni e applicazioni ai problemi di equilibrio" e ha beneficiato dell'assegno dal 2 Novembre 1999 al 30 Settembre 2001.

In data 1 Ottobre 2001 ha preso servizio presso la Facoltà di Scienze Mat. Fis. Nat. dell'Università di Catania nel ruolo di Ricercatore, settore scientifico disciplinare MAT/09 Ricerca Operativa afferendo al Dipartimento di Matematica e Informatica della suddetta Facoltà.

Dal 1<sup>o</sup> Ottobre 2004 al 17 Gennaio 2005 è stata Ricercatore Confermato, settore scientifico disciplinare MAT/09 Ricerca Operativa.

Dal 18 Gennaio 2005 è Professore Associato, settore scientifico disciplinare MAT/09 Ricerca Operativa presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Catania.

Dal 18 Gennaio 2008 è Professore Associato confermato, settore scientifico disciplinare MAT/09 Ricerca Operativa.

### Attività didattica di base

- *Anno Accademico 1998-1999*

- Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica** e in **Matematica**.

- *Anno Accademico 1999-2000*

- Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica** e in **Matematica**;
- Esercitazioni del corso di **Analisi Numerica** per il corso di studi in **Matematica**.

- *Anno Accademico 2000-2001*
  - Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica** e in **Matematica**.
- *Anno Accademico 2001-2002*
  - **Ricerca Operativa I** per il corso di studi in **Matematica** - Vecchio Ordinamento;
  - Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica**;
  - **Temi di Analisi Numerica** per la **SISSIS**.
- *Anno Accademico 2002-2003*
  - **Ricerca Operativa I** per il corso di studi in **Matematica** - Vecchio Ordinamento;
  - Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica**;
  - **Temi di Ricerca Operativa** per la **SISSIS**.
- *Anno Accademico 2003-2004*
  - **Ricerca Operativa I** per il corso di studi in **Matematica** - Vecchio Ordinamento e Nuovo Ordinamento;
  - Esercitazioni del corso di **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Informatica**;
  - Esercitazioni del corso di **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
  - **Temi di Ricerca Operativa** per la **SISSIS**.
- *Anno Accademico 2004-2005*

- **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica**;
  - **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
  - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**.
- *Anno Accademico 2005-2006*
    - **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica**;
    - **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
    - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**.
- *Anno Accademico 2006-2007*
    - **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
    - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**.
- *Anno Accademico 2007-2008*
    - **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica**;
    - **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
    - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**;
    - **Elementi di Analisi Matematica e Analisi Numerica**, nell'ambito del Progetto di Formazione Waterfall, presso la SIFI.
- *Anno Accademico 2008-2009*
    - **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica** e in **Matematica per le Applicazioni**;

- **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
  - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**.
- *Anno Accademico 2009-2010*
    - **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica** e in **Matematica per le Applicazioni**;
    - **Ottimizzazione** per il corso di studi in **Matematica per le Applicazioni**;
    - **Network e Supernetwork** per il corso di studi in **Matematica (Laurea Specialistica)**.
  - *Anno Accademico 2010-2011*
    - **Ricerca Operativa** per il corso di studi in **Matematica**.

Ha seguito o sta seguendo 17 studenti per la preparazione della tesi di laurea in Matematica Vecchio Ordinamento, 20 studenti per la tesi di laurea in Matematica Nuovo Ordinamento e 5 studenti per la tesi di laurea specialistica in Matematica. Inoltre, ha guidato 12 studenti in Matematica Nuovo Ordinamento nell'attività di stage all'interno del Dipartimento.

#### Formazione avanzata e direzione di ricerche

- Nel 2006-2007 Docente responsabile dell'Assegno di Ricerca dal titolo: "Teoria esistenziale e della dualità in analisi variazionale, con applicazioni ai problemi di equilibrio ed evoluzione".
- Nel 2010-2011 Docente responsabile dell'Assegno di Ricerca dal titolo: "Problemi di equilibrio e modelli variazionali".

#### Attività accademica ed organizzativa

- Componente della commissione per il conferimento di un assegno di ricerca presso il Dipartimento di Matematica e Informatica nell'anno 2006.
- Componente del Collegio dei Docenti in seno al Dottorato di Ricerca in Matematica per la Tecnologia, con sede amministrativa presso l'Università di Catania.
- Ha trascorso dei periodi come Visiting Professor presso la University of Massachusetts, Amherst, Department of Finance and Operations Management, Eugene M. Isenberg, School of Management, ospite della Prof.ssa Anna Nagurney, nel gennaio 2001 e nel luglio 2004.
- Membro del Comitato Organizzatore dell'International Workshop "Equilibrium Problems and Variational Models", Taormina 3-5 dicembre 1998.
- Membro del Comitato Organizzatore dell'International School of Mathematics "G. Stampacchia" 32<sup>o</sup> Workshop "Equilibrium Problems and Variational Models", Erice 23 giugno - 2 luglio 2000.
- Membro del Comitato Organizzatore del First Joint Meeting AMS-UMI Special Sessions: "Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations and Systems" e "Variational Analysis and Applications", Pisa 12-16 giugno 2002.
- Membro del Comitato Organizzatore dell'International Conference on "Variational Analysis and Applications", Erice 20-30 Giugno 2003.
- Organizzatrice del Minisymposium "Equilibrium Problems and Variational Models" nell'ambito del 5<sup>o</sup> International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Sydney 7-11 Luglio 2003.
- Membro del Comitato Organizzatore del Workshop su "Equazioni a Derivate Parziali: Aspetti Metodologici, Modellistica, Applicazioni", Ragusa Ibla, 29 Giugno - 2 Luglio 2005.

- È stata invitata dall'Università di Harvard per un periodo di Visiting Scholarship presso la Division of Engineering and Applied Sciences (DEAS) che si è svolto dal 1<sup>o</sup> Marzo al 31 Maggio 2006.
- Membro del Comitato Organizzatore dell'International School of Mathematics "G. Stampacchia" 44<sup>o</sup> Workshop "Variational Analysis and Partial Differential Equations", Erice, 5-14 luglio 2006.
- Ha ospitato la Professoressa Anna Nagurney, John F. Smith Memorial Professor dell'Università del Massachusetts in Amherst durante il Fulbright Senior Specialist Award in Business Administration presso l'Università di Catania dal 5 al 19 Marzo 2008.
- Co-organizzatrice, insieme alla Professoressa Anna Nagurney, del workshop su "Complex Networks – Equilibrium and Vulnerability Analysis with Applications", Catania, 10-12 Marzo, 2008.
- Membro del Comitato Organizzatore dell'International School of Mathematics "G. Stampacchia" 51<sup>o</sup> Workshop "Variational Analysis and Applications", Erice, 9-17 maggio 2009.
- Organizzatrice della Sessione Variational Inequalities and Applications to Economic Market Models, XXIV EURO Conference, Lisbona, 11-14 luglio 2010.
- Membro del Comitato Organizzatore del Fifth China-Italy Colloquium on Applied Mathematics CICAM5, Acireale (CT), 27-30 settembre 2010.
- Co-organizzatrice, insieme alla Dott.ssa Laura Scrimali, della sessione "Variational Inequality Problems and Equilibrium Problems", 41<sup>a</sup> Conferenza Annuale AIRO, Villa San Giovanni, 7-10 settembre 2010.
- Componente della commissione per il conferimento di un assegno di ricerca presso il Dipartimento di Matematica e Informatica nell'anno 2010.

- Componente della commissione giudicatrice per la nomina a professore confermato SSD MAT/09 nell'anno 2010.

### Attività scientifica

- Aderisce alla sezione Calcolo delle variazioni, teoria del controllo e ottimizzazione dello GNAMPA.
- Membro dell'Editorial Board della Serie "New Dimensions in Networks", Edward Elgar Publishers Ltd., Editore: Prof.ssa Anna Nagurney della University of Massachusetts.
- Membro del gruppo di ricerca internazionale su Equilibrium Models in Complex Systems (EMICS), coordinatore Prof. Igor V. Konnov.
- Membro dell'AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa).
- Membro del CIRO (Centro Interuniversitario per la Ricerca Operativa).
- È un componente del Progetto ex 60% 2003 - Problemi di esistenza, unicità e regolarità per equazioni e sistemi ellittici e parabolici. Responsabile Prof. M. Marino.
- È un componente del Progetto FIRB - Analisi di equazioni a derivate parziali, lineari e non lineari: aspetti metodologici, modellistica, applicazioni. Responsabile Prof. M. Marino.
- È un componente del Progetto di Ricerca di Ateneo 2006 - Disequazioni Variazionali, Equazioni e Sistemi alle Derivate Parziali e Applicazioni a Problemi di Equilibrio. Responsabile Prof. A. Maugeri.
- È un componente del Progetto di Ricerca di Ateneo 2007 - Disequazioni Variazionali, Equazioni e Sistemi alle Derivate Parziali e Applicazioni a Problemi di Equilibrio. Responsabile Prof. A. Maugeri.

- È un componente del Progetto di Ricerca di Ateneo 2008 - Disequazioni Variazionali, Equazioni e Sistemi alle Derivate Parziali e Applicazioni a Problemi di Equilibrio. Responsabile Prof. A. Maugeri.
- È un componente del Progetto PRIN 2008 - Analisi Variazionale ed Equazioni alle Derivate Parziali. Reponsabile Prof. A. Maugeri.
- Referee per le riviste Journal of Optimization Theory and Applications, Operations Research Letters, European Journal of Operational Research, Quantitative Finance, Nonlinear Analysis, Computational Management Science, Le Matematiche, Journal of Systems Science and Systems Engineering, Mathematics and Computers in Simulation, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, Optimization Methods and Software, Optimization Letters.

#### Conferenze su invito e partecipazioni nei seguenti Congressi e Convegni

- Workshop su **Problemi di Equilibrio con vincoli unilaterali. Teoria Lagrangiana e Dualità**, Scilla (RC) 17-18 maggio 1996;
- Convegno su **Metodi numerici per l'ottimizzazione**, Cortona (AR) 8-12 giugno 1997;
- 9<sup>o</sup> Convegno Internazionale su **Equazioni Differenziali**, Plovdiv (Bulgaria) 18-23 agosto 1998;
- Workshop su **Equilibrium Problems and Variational Models**, Taormina (ME) 3-5 dicembre 1998;
- Convegno su **Evolution Equations and Applications**, Cortona (AR) 9-14 maggio 1999;
- Convegno **Giornate Nonlineari**, Bologna 11-13 novembre 1999;

- 32<sup>o</sup> Workshop su **Equilibrium Problems and Variational Models**, Erice (TP) 23 giugno - 2 luglio 2000;
- 2001 **SIAM Annual Meeting**, San Diego (California), 9-13 luglio 2001;
- **XXXII Conferenza Annuale AIRO** “La Ricerca Operativa nella Gestione del Territorio e delle Risorse”, Villasimius (CA), 4-7 settembre 2001;
- **VI Congresso Nazionale della Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale**, Chia Laguna (CA) 27-31 maggio 2002, Sessione: Applications of Variational Inequalities (Coordinatore: Prof. I.V. Konnov);
- **First Joint Meeting AMS-UMI**, Pisa 12-16 giugno 2002;
- International Conference on “**Variational Analysis and Applications**”, Erice 20-30 Giugno 2003;
- 5<sup>th</sup> International Congress on **Industrial and Applied Mathematics**, Sydney 7-11 Luglio 2003;
- Conference on **High Performance Algorithms and Software for Nonlinear Optimization - Status and Perspectives**, in onore del 50-simo compleanno di Panos Pardalos, Ischia, 18-20 Giugno 2004;
- **Fourth World Congress of Nonlinear Analysts WCNA-2004**, 30 Giugno - 7 Luglio 2004, Orlando, Florida, USA;
- **XXXV Conferenza Annuale AIRO**, 7-10 Settembre 2004, Lecce;
- 8<sup>th</sup> **SIAM Conference on Optimization**, Stoccolma (Svezia), 15-19 maggio 2005;
- 5<sup>th</sup> **ISAAC Congress**, 25-30 luglio 2005, Catania;
- **XXXVI Conferenza Annuale AIRO**, 6-9 settembre 2005, Camerino;
- **Southern Ontario Dynamics Day**, 7 aprile 2006, Toronto;

- **Applied Math Colloquium Series** presso l'Università di Harvard, 24 maggio 2006, Boston, Massachusetts, USA;
- International Conference “**Variational Analysis and Partial Differential Equations**”, Erice 5-14 Luglio 2006;
- **6<sup>th</sup> International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2007)**, 16-20 Luglio 2007, Zurigo;
- Workshop su “**Complex Networks – Equilibrium and Vulnerability Analysis with Applications**”, 10-12 Marzo, 2008;
- **XXXIX Conferenza Annuale AIRO**, 7-11 settembre 2008, Ischia;
- **Joint Mathematics Meetings**, 5-8 gennaio 2009, Washington DC;
- 51<sup>st</sup> Workshop “**Variational Analysis and Applications**”, Erice 9-17 Maggio 2009;
- **23<sup>rd</sup> European Conference on Operational Research**, Bonn 5-8 Luglio 2009;
- **Fifth China-Italy Colloquium on Applied Mathematics CICAM5**, Acireale (CT), 27-30 settembre 2010.

### Premi

- Nel Giugno 1996 le è stato conferito il Premio “Gioacchino Iapichino” dall'Accademia Nazionale dei Lincei per l'articolo: “*Dual Variational Inequality and Applications to asymmetric traffic equilibrium problem with capacity constraints*”, “Equilibrium Problems with Side Constraints. Lagrangean Theory and Duality”, F. Giannessi - A. Maugeri editors, Le Matematiche, **49**, 1994, 211-222.
- Dal 10 al 23 Marzo 2004 è stata invitata presso la Rockefeller Foundation's Study and Conference Center di Bellagio a organizzare un team residency su “Dynamics

of Complex Networks in an Environment of Risk and Uncertainty: Theoretical Foundations and Applications to Global Supply Chain and International Financial Networks” insieme alle Professoressa Anna Nagurney (University of Massachusetts, USA) e Monica Gabriela Cojocaru (University of Guelph, CANADA).

## References

### Elenco delle Pubblicazioni Scientifiche

#### Libri

- [1] Editore del libro “**Equilibrium Problems and Variational Models**”, Kluwer Academic Publishers 2002, insieme a F. Giannessi and A. Maugeri.
- [2] Autore del libro “**Dynamic Networks and Evolutionary Variational Inequalities**”, Edward Elgar Publishing, Chentelham, UK, 2006.

#### Capitoli di Libri

- [3] P. Daniele, A. Maugeri, “*Vector Variational Inequalities and Modelling of a Continuum Traffic Equilibrium Problem*”, in *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, F. Giannessi Ed., Vol. 38, 2000, 97–111.
- [4] P. Daniele, “*Variational Inequalities for Static Equilibrium Market. Lagrangean Function and Duality*”, in *Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models*, Kluwer Academic Publishers, F. Giannessi – A. Maugeri – P. Pardalos Eds., 2001, 43–58.
- [5] P. Daniele, A. Maugeri, “*On Dynamical Equilibrium Problems and Variational Inequalities*”, in *Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models*, Kluwer Academic Publishers, F. Giannessi – A. Maugeri – P. Pardalos Eds., 2001, 59–69.

- [6] P. Daniele, A. Maugeri, “*Equilibrium Problems and Variational Inequalities: a Continuum Transportation Model*”, Computational fluid and solid mechanics, Vol. 1, 2 (Cambridge, MA, 2001), Elsevier, Amsterdam, 2001, 1543-1545.
- [7] P. Daniele, G. Idone, A. Maugeri, “*The Continuum Model of Transportation Problem*”, in Equilibrium Problems and Variational Models, Kluwer Academic Publishers, P. Daniele – F. Giannessi – A. Maugeri Eds., 2002, 53–60.
- [8] P. Daniele, A. Maugeri, “*The Economic Model for Demand-Supply Markets*”, in Equilibrium Problems and Variational Models, Kluwer Academic Publishers, P. Daniele – F. Giannessi – A. Maugeri Eds., 2002, 61–78.
- [9] P. Daniele, “*Variational Inequalities for Evolutionary Financial Equilibrium*”, in Innovations in Financial and Economic Networks, A. Nagurney Ed., 2003, 84–108.
- [10] P. Daniele, “*Variational Inequalities for General Evolutionary Financial Equilibrium*”, in Variational Analysis and Applications, F. Giannessi - A. Maugeri Eds., Springer Verlag, 2005, 279–299.
- [11] M.G. Cojocaru, P. Daniele, A. Nagurney, “*Projected Dynamical Systems, Evolutionary Variational Inequalities, Applications, and a Computational Procedure*”, in Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, A. Chinchuluun - A. Migdalas - P.M. Pardalos - L. Pitsoulis Eds., Springer Optimization and its Applications, Springer, New York, 2008, 387–406.
- [12] P. Daniele, S. Giuffrè, A. Maugeri, S. Pia, “*A panoramic View on Projected Dynamical Systems*”, in Nonlinear Analysis and Variational Problems, P. Pardalos - Th.M. Rassias - A.A. Khan Eds., Springer, 2009, 235–258.

### **Articoli su Riviste Internazionali**

- [13] P. Daniele, “*Dual Variational Inequality and Applications to asymmetric traffic equilibrium problem with capacity constraints*”, in Equilibrium Problems with Side Constraints. Lagrangean Theory and Duality, Le Matematiche, 49, 1994, 211–222.

- [14] P. Daniele, “*A remark on a dynamic model of a Quasi-Variational Inequality*”, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 48, 1997, 91-100.
- [15] P. Daniele, “*Duality Theory for Variational Inequalities*”, Communications in Applied Analysis 1, no. 2, 1997, 257-267.
- [16] P. Daniele, A. Maugeri, W. Oettli “*Variational Inequalities and Time-dependent traffic equilibria*”, C. R. Acad. Sci, Paris, t. 326, serie 1, 1998, 1059-1062.
- [17] P. Daniele, A. Maugeri, W. Oettli, “*Time-dependent traffic equilibria*”, Jou. Optim. Th. Appl., Vol. 103, No. 3, 1999, 543-555.
- [18] P. Daniele, “*Lagrangean Function for Dynamic Variational Inequalities*”, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 58, 1999, 101-119.
- [19] P. Daniele, A. Maugeri, “*Variational Inequalities and Discrete and Continuum Models of Network Equilibrium Problems*”, Mathematical and Computer Modelling **35**, 2002, 689–708.
- [20] P. Daniele, “*Evolutionary Variational Inequalities and Economic Models for Demand Supply Markets*”, M<sup>3</sup>AS: Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 4 (13) 2003, 471–489.
- [21] P. Daniele, G. Idone, A. Maugeri, “*Variational Inequalities and the Continuum Model of Transportation Problem*”, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **4**, 2003, 11–16.
- [22] P. Daniele, “*Time-Dependent Spatial Price Equilibrium Problem: Existence and Stability Results for the Quantity Formulation Model*”, Journal of Global Optimization, **28**, 2004, 283–295.
- [23] M.G. Cojocaru, P. Daniele, A. Nagurney, “*Projected Dynamical Systems and Evolutionary Variational Inequalities via Hilbert Spaces and Applications*”, Jou. Optim. Th. Appl., **127**, no.3, 2005, 549–563.

- [24] M.G. Cojocaru, P. Daniele, A. Nagurney, “*Double-layered dynamics: a unified theory of projected dynamical systems and evolutionary variational inequalities*”, European Journal of Operational Research, **175**, 1, 2006, 494–507.
- [25] P. Daniele, S. Giuffré, S. Pia, “*Competitive Financial Equilibrium Problems with Policy Interventions*”, Journal of Industrial and Management Optimization, Vol. 1, N. 1, 2005, 39–52.
- [26] P. Daniele, “*Evolutionary Variational Inequalities Applied to Financial Equilibrium Problems in an Environment of Risk and Uncertainty*”, Nonlinear Analysis, **63**, 2005, 1645–1653.
- [27] A. Nagurney, Z. Liu, M.G. Cojocaru, P. Daniele, “*Dynamic Electric Power Supply Chains and Transportation Networks: An Evolutionary Variational Inequality Formulation*”, Transportation Research E., **43**, 2007, 624–646.
- [28] P. Daniele, S. Giuffré, “*General Infinite Dimensional Duality Theory and Applications to Evolutionary Network Equilibrium problems*”, Optimization Letters, **1** (3), 2007, 227–243.
- [29] A. Nagurney, D. Parkes, P. Daniele, “*The Internet, Evolutionary Variational Inequalities, and the Time-Dependent Braess Paradox*”, Computational Management Science, **4**, 2007, 355–375.
- [30] P. Daniele, S. Giuffré, G. Idone, A. Maugeri, “*Infinite Dimensional Duality and Applications*”, Mathematische Annalen **339** (1), 2007, 221–239.
- [31] P. Daniele, “*Lagrange Multipliers and Infinite-Dimensional Equilibrium Problems*”, Journal of Global Optimization, **40**, no. 1, 2008, 65–70.
- [32] P. Daniele, S. Giuffré, A. Maugeri, “*Remarks on General Infinite Dimensional Duality with Cone and Equality Constraints*”, Communications in Applied Analysis, **13** (4), 2009, 567–578.

- [33] P. Daniele, “*Evolutionary Variational Inequalities and Applications to Complex Dynamic Multi-level Models*”, *Transport. Res. Part E*, 46, 2010, 855-880, doi: 10.1016/j.tre.2010.03.005.
- [34] A. Barbagallo, P. Daniele, A. Maugeri, “*Variational formulation for a general dynamic financial equilibrium problem: Balance law and liability formula*”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, doi:10.1016/j.na.2010.10.013.

### **Submitted**

- [35] P. Daniele, S. Giuffré, A. Maugeri, F. Raciti, “*Duality Theory and Applications to Unilateral Problems*”.

### **Atti di Congressi**

- [36] P. Daniele, “*Variational Inequalities, Equivalent Optimization Problems and Associated Lagrangean Function*”, 9<sup>th</sup> Int. Coll. on Differential Equations, D. Bainov (Ed.) VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 107-112.

### **Tesi di Dottorato**

- [37] P. Daniele, “*Disequazioni Variazionali e Dualità. Applicazioni a problemi di equilibrio*”, Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica Applicata ed Informatica - XI Ciclo - Università degli Studi di Napoli “Federico II”.

### **Descrizione dell’Attività di ricerca**

Le attività di ricerca svolte dalla Prof.ssa Daniele possono essere raggruppate in tre filoni principali:

1) Disequazioni variazionali e applicazioni ai problemi di equilibrio (problema dell’equilibrio del traffico nel caso statico e nel caso di evoluzione; problema dei mercati economici spazialmente distribuiti nella formulazione dipendente dai prezzi e nella formulazione dipendente dalle quantità; problema dell’equilibrio finanziario in presenza di rischio e

incertezza, nel caso in cui il volume finanziario investito in ogni settore dipende dal tempo e, di conseguenza, anche i prezzi dei titoli e la distribuzione ottimale all'interno del portafoglio; problema del paradosso di Braess nel caso dinamico; problema dell'equilibrio su Internet; problema dell'equilibrio per una catena di offerte di reti elettriche);

2) Legame tra i punti critici di sistemi dinamici proiettati e le soluzioni di disequazioni variazionali di evoluzione in spazi di Hilbert;

3) Teoria della dualità in dimensione infinita e condizioni ottimali per problemi di complementarità generalizzata.

### **1) Disequazioni variazionali e applicazioni ai problemi di equilibrio**

La Prof.ssa Daniele ha studiato il problema dell'equilibrio del traffico nel caso discreto (vedi [2], [14], [16], [17]), a partire dalla formulazione statica con la definizione di equilibrio dal punto di vista dell'utente (Wardrop, 1952) e la conseguente formulazione variazionale (Smith, 1979), passando poi al modello dinamico in cui i flussi e le richieste di traffico dipendono dal tempo e sono presenti vincoli di capacità sui flussi (vedi [16], [17]), pervenendo ad una forma generalizzata dell'equilibrio di Wardrop, ad una disequazione variazionale di evoluzione ed elaborando la teoria esistenziale delle soluzioni della disequazione variazionale associata. La ragione fondamentale per cui è necessario considerare modelli dinamici è stata indicata da M.J. Beckmann e J.P. Wallace nel lavoro *Continuous Lags and the Stability of Market Equilibrium*, *Economica*, **36**, n. 141, (1969), 58–68, in cui gli autori, già nel 1969, affermavano che la formulazione con dati dipendenti dal tempo dei problemi di equilibrio su reti permette di esplorare le dinamiche dei processi di aggiustamento quando interviene una risposta a velocità non infinita, cioè dopo un certo periodo di tempo. In [16] e [17] la Prof.ssa Daniele ha proposto una formulazione generale dei problemi dinamici su reti le cui condizioni di equilibrio si esprimono mediante disequazioni variazionali di evoluzione, esaminando modelli più generali in cui vengono introdotti vincoli aggiuntivi sui flussi sui percorsi ed esplicitati i termini di ritardo. Inoltre, ha elaborato delle procedure risolutive, basate sui metodi del sottogradiente e di discretizzazione, per determinare le soluzioni delle disequazioni variazionali di evoluzione associate.

Notevole importanza ha anche lo studio del problema dell'equilibrio del traffico nel caso continuo. A tale modello si perviene quando si suppone che i nodi della rete siano così fitti che è impossibile rappresentare i fenomeni di traffico rimanendo nel caso discreto. S. dafermos nel 1980 è stata la prima a considerare il caso continuo nel lavoro *Continuum Modelling of Transportation Networks*, Transportation Res. **14** B (1980), 295–301, in cui fornisce una trattazione euristica al problema. Nei lavori [3], [6], [7], [19] e [21] la Prof.ssa Daniele, insieme agli altri autori, ha affrontato in forma rigorosa il problema nel caso continuo. Tale problema consiste nel trovare una soluzione della disequazione variazionale

$$\text{Find } u \in \mathbb{K} \text{ tale che } \int_{\Omega} c(x, u(x))(v(x) - u(x)) dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}, \quad (DV)$$

dove

$$\mathbb{K} = \{v = \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2) : v_1(x) \geq 0, v_2(x) \geq 0, \operatorname{div} v + t(x) = 0,$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = \varphi_1(x), u_2|_{\partial\Omega} = \varphi_2(x)\},$$

$\Omega$  è un dominio limitato semplicemente connesso in  $\mathbb{R}^2$  di punto generico  $x = (x_1, x_2)$ , con frontiera  $\partial\Omega$  Lipschitziana,  $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$  rappresenta il flusso incognito ad ogni punto  $x \in \Omega$  e le componenti  $v_1(x), v_2(x)$  sono la densità di traffico attraverso un intorno di  $x$  nelle direzioni crescenti degli assi  $x_1$  e  $x_2$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$  è il flusso entrante a partire dalla frontiera  $\partial\Omega$  (o su una parte di  $\partial\Omega$ ),  $c(x, u(x)) = (c_1(x, u(x)), c_2(x, u(x)))$  è il “costo personale” le cui componenti  $c_1(x, u(x)), c_2(x, u(x))$  rappresentano il costo di percorrenza lungo gli assi  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente.  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  è lo spazio funzionale definito da:

$$\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}^2) = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}$$

dotato della norma:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} \|u\|^2 dx + \int_{\Omega} |\operatorname{div} v|^2 dx.$$

La condizione di equilibrio è la seguente:

**Def. 1.**  $u(x) \in \mathbb{K}$  è una distribuzione di equilibrio se esiste un potenziale  $\mu \in H^1(\Omega)$  tale che

$$\left( c_i(x, u(x)) - \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) u_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \text{ q. o. in } \Omega$$

$$c_i(x, u(x)) - \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \geq 0 \quad i = 1, 2, \text{ q. o. in } \Omega.$$

Il potenziale  $\mu$  misura il costo di un utente che viaggia dal punto  $x$  alla frontiera  $\partial\Omega$  usando il cammino più economico. La Prof.ssa Daniele ha dimostrato che la condizione di equilibrio è equivalente alla disequazione variazionale ( $DV$ ), ha poi provato un teorema di esistenza e, infine, ha presentato un metodo del tipo sottogradiente per il calcolo della soluzione.

Il problema dei mercati economici spazialmente distribuiti in presenza di eccessi di produzione e di domanda e di vincoli di capacità sui costi e sui flussi di merci è stato affrontato in [1], [2], [4], [5], [8], [18], [20], [22]. Tale modello viene esaminato nel caso statico e nel caso dinamico, sia nella formulazione dipendente dai prezzi, sia nella formulazione dipendente dalle quantità. È stato anche presentato un modello in due fasi. In una prima fase i mercati  $P_1, \dots, P_n$  producono una certa merce  $m_1$  che viene richiesta dai mercati consumatori  $Q_1, \dots, Q_m$  nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ . Dopo un tempo  $\Delta$  si passa ad una seconda fase, in cui i mercati  $Q_1, \dots, Q_m$ , sfruttando la merce  $m_1$  prodotta nell'intervallo precedente, producono a loro volta un'altra merce  $m_2$  che viene richiesta dai mercati  $P_1, \dots, P_n$  in un successivo intervallo di tempo  $[\Delta, T + \Delta]$ . Anche in questo caso si perviene, per ogni fase, ad una disequazione variazionale che caratterizza le condizioni di equilibrio. Inoltre, si riesce a stabilire un legame tra le due fasi (tenendo conto che la produzione di  $m_2$  è subordinata alla disponibilità di  $m_1$ ), pervenendo ad una formulazione generale espressa ancora una volta da una disequazione variazionale.

I modelli finanziari di evoluzione sono stati trattati in [2], come pure negli articoli [9], [10], [25] e [26]. In particolare la Prof.ssa Daniele si è occupata di un'economia finanziaria formata da  $m$  settori (banche, istituti finanziari, ecc.) e da  $n$  beni (ipoteche, mutui, ecc.) nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ . Trovandosi in presenza di rischio e incertezza, il volume finanziario tenuto da ogni settore non può essere considerato stabile rispetto al tempo,

ma aumenterà o diminuirà a seconda delle condizioni economiche favorevoli o sfavorevoli. Come conseguenza, anche gli attivi e i passivi di ogni settori dipenderanno dal tempo, come i prezzi dei beni. Sono stati esaminati due tipi di funzioni utilità:

- il caso quadratico:

$$U_i(x_i(t), y_i(t), r(t)) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}^T Q^i(t) \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} - r(t) \times [x_i(t) - y_i(t)]$$

essendo  $Q^i(t)$  la matrice varianza-covarianza associata al rischio;

- il caso più generale:

$$U_i(t, x_i(t), y_i(t), r(t)) = u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + r(t)(x_i(t) - y_i(t)),$$

dove  $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$  è una funzione concava e differenziabile.

In entrambi i casi si riescono a determinare delle condizioni di equilibrio (espresse mediante uguaglianze e disuguaglianze), che possono essere caratterizzate da opportune disequazioni variazionali di evoluzione. Per esse vengono anche forniti teoremi di esistenza della soluzione. Successivamente, il modello finanziario viene ulteriormente generalizzato mediante l'introduzione di interventi politici, presentati sotto la forma di tasse e controlli sui prezzi.

In [27] viene presentato un modello di equilibrio su rete relativo a una catena di offerte di energia elettrica nel caso statico con domande note e si stabilisce l'equivalenza tra tale modello e un modello di equilibrio su rete di trasporto con domande fissate. Questa equivalenza viene poi estesa anche al caso dinamico in cui le domande variano nel tempo, usando una formulazione variazionale di evoluzione. In particolare, si considerano  $G$  generatori di energia,  $S$  fornitori di energia,  $V$  fornitori della trasmissione e  $K$  mercati consumatori, come evidenziato in Fig. 1.

In [29] si sviluppa un modello variazionale di evoluzione di Internet con classi multiple di traffico e se ne dimostra l'utilità attraverso la formulazione e la risoluzione del paradosso di Braess nel caso dinamico. Infatti, consideriamo Internet come un grafo  $\mathcal{G} = [N, L]$ , formato dall'insieme  $N$  dei nodi e l'insieme  $L$  degli archi. Denotiamo con  $W$  l'insieme

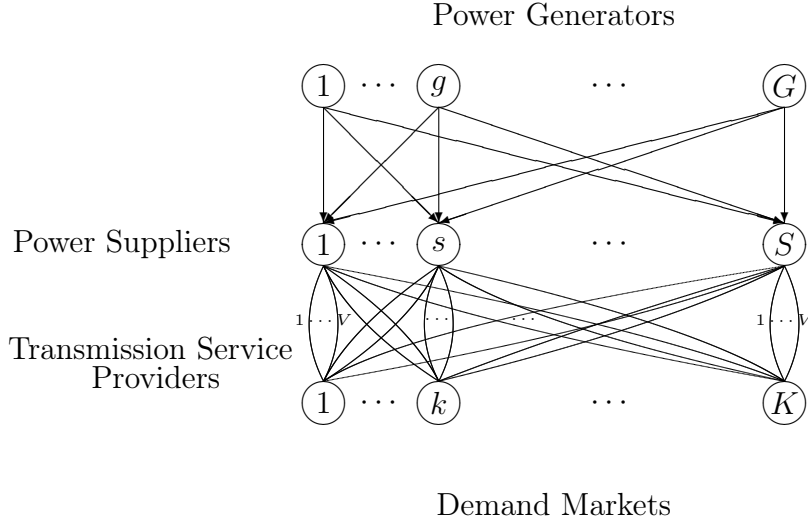


Figure 1: The Electric Power Supply Chain Network

delle coppie Origine /Destinazione (O/D), con  $P_w$  l'insieme dei percorsi (ciascuno formato da archi) che congiungono la coppia O/D  $w$  e con  $P$  l'insieme di tutti i percorsi che congiungono tutte le coppie O/D di Internet. Supponiamo che Internet sia suddiviso in classi di lavoro e indichiamo con  $d_w^k(t)$  la domanda, cioè il traffico generato tra la coppia O/D  $w$  all'istante  $t$  dalla classe di lavoro  $k$ . Se indichiamo con  $x_r^k(t)$  il flusso sul percorso  $r$  all'istante  $t$  della classe  $k$  (che supponiamo non negativo), allora l'insieme dei flussi ammissibili  $\mathbb{K}$  è dato da:

$$\mathbb{K} = \left\{ x \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{KnP}) : 0 \leq x(t) \leq \mu(t) \text{ q.o. in } [0, T]; \right. \\ \left. \sum_{p \in P_w} x_p^k(t) = d_w^k(t), \forall w, \forall k \text{ q.o. in } [0, T] \right\}.$$

**2) Legame tra i punti critici di sistemi dinamici proiettati e le soluzioni di disequazioni variazionali di evoluzione in spazi di Hilbert**

Il legame tra la teoria delle disequazioni variazionali e la teoria dei sistemi dinamici proiettati viene affrontato in [2], [11], [23] e [24]. In uno studio condotto in collaborazione con le Professoressa Anna Nagurney della University of Massachusetts at Amherst (USA) e Monica–Gabriela Cojocaru della University of Guelph (Canada) è stato osservato che molti problemi di equilibrio possono essere ricondotti ad un’unica formulazione generale di insieme ammissibile  $\mathbb{K}$  e di Disequazione Variazionale di Evoluzione (EVI). Di conseguenza, usando risultati già noti sulla teoria dei Sistemi Dinamici Proiettati (PDS), le soluzioni di tali EVI coincidono con i punti critici dei PDS.

Consideriamo un sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto e limitato dello spazio di Banach riflessivo  $L^p([0, T], R^q)$  dato da:

$$\mathbb{K} = \left\{ u \in L^p([0, T], R^q) \mid \lambda(t) \leq u(t) \leq \mu(t) \text{ q.o. in } [0, T]; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^q \xi_i u_i(t) = \rho(t) \text{ q.o. in } [0, T], \xi_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, q\} \right\},$$

dove  $\lambda, \mu, \rho \in L^p([0, T], R^q)$ . Sia  $F : \mathbb{K} \rightarrow (L^p([0, T], R^q))^*$ . Vale il seguente teorema.

**Teor. 1.** *Le soluzioni della disequazione variazionale di evoluzione*

$$\text{trovare } v \in \mathbb{K} \text{ tale che } \ll F(v), u - v \gg \geq 0, \forall u \in \mathbb{K}. \quad (EVI)$$

*coincidono con i punti critici del sistema dinamico proiettato:*

$$\begin{cases} \frac{du(\cdot, \tau)}{d\tau} = \Pi_{\mathbb{K}}(u(\cdot, \tau), -F(u(\cdot, \tau))), \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot) \in \mathbb{K}, \end{cases} \quad (PDS)$$

*e viceversa*

In [11] viene anche presentato un algoritmo risolutivo per il calcolo delle soluzioni delle disequazioni variazionali di evoluzione basato sul metodo di discretizzazione e ottenuto con l’aiuto della teoria dei PDS.

**3) Teoria della dualità in dimensione infinita e condizioni ottimali per problemi di complementarità generalizzata.**

La usuale teoria della dualità non può essere applicata ai problemi in dimensione infinita, perché, principalmente, l'insieme dei vincoli ha un interno vuoto e, quindi, la condizione di Slater non è verificata, e anche i vincoli possono essere non lineari. La Prof.ssa Daniele, che ha studiato il caso finito-dimensionale nei lavori [13] e [15], in [30], insieme ad altri autori, presenta una teoria della dualità in dimensione infinita ottenuta utilizzando nuovi teoremi di separazione basati sulla nozione di interno quasi-relativo, che, in tutti i problemi concreti presenti in letteratura, è non vuoto, e introducendo una condizione di qualificazione sui vincoli.

Precisamente siano  $X$  uno spazio lineare topologico reale,  $S$  un sottoinsieme non vuoto di  $X$ ;  $(Y, \|\cdot\|)$  uno spazio reale normato parzialmente ordinato dal cono convesso  $C$ ;  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : S \rightarrow Y$  tali che  $(f, g) : S \rightarrow \mathbb{R} \times Y$  sia “convex-like” rispetto al cono prodotto  $\mathbb{R}_+ \times C$ . Vengono considerati i seguenti problemi di ottimizzazione vincolata:

$$\min_{x \in \mathbb{K}} f(x) \quad (3)$$

$$\max_{u \in C^*} \inf_{x \in S} [f(x) + \langle u, g(x) \rangle] \quad (4)$$

dove l'insieme dei vincoli è dato da  $\mathbb{K} = \{x \in S : g(x) \in -C\}$  e  $C^*$  è il cono duale di  $C$ . Inoltre l'*Ipotesi S* è soddisfatta nel punto  $x_0 \in \mathbb{K}$  se risulta

$$T_{\widetilde{M}}(f(x_0), \theta_Y) \cap \{\mathbb{R}^-, \theta_Y\} = \emptyset \quad (S)$$

dove  $\widetilde{M} = \{(f(x) + \alpha, g(x) + y) : x \in S \setminus \mathbb{K}, \alpha \geq 0, y \in C\}$ .

Supponendo che  $\mathbb{K} \neq \emptyset$ , qri  $C \neq \emptyset$ , cl  $(C - C) = Y$  ed esiste  $\hat{x} \in S$  con  $g(\hat{x}) \in -\text{qri } C$ , gli autori dimostrano che, se il problema (3) è risolubile e l'ipotesi S è soddisfatta nella soluzione  $x_0 \in \mathbb{K}$  del problema (3), allora anche il problema (4) ammette soluzione, e i valori estremi di entrambi i problemi coincidono.

In [30] questa teoria è applicata per risolvere il problema, finora non completamente risolto in dimensione infinita, di trovare i moltiplicatori di Lagrange associati a problemi di ottimizzazione o a disequazioni variazionali. Come esempio, viene trovato il moltiplicatore di Lagrange associato al problema di torsione elasto-plastica.

In [28] viene affrontato il caso in cui i vincoli sono espressi mediante disequazioni, cioè  $g(x) \in -C$ , dove  $C$  è il cono ordinante e anche mediante equazioni, cioè  $h(x) = \theta_Z$ . Quindi

le difficoltà già presenti nel caso di soli vincoli di disequazioni aumentano ulteriormente ed anche in questo caso viene dimostrato il teorema di forte dualità tra il problema di ottimizzazione convessa e il suo duale lagrangiano. Osserviamo che questi risultati non richiedono alcuna ipotesi di differenziabilità sulle funzioni  $g$  e  $h$ .

Per molti problemi di equilibrio su reti, come il problema del trasporto, della migrazione, della vaccinazione, dei mercati economici spazialmente distribuiti, delle reti elettriche, dei mercati finanziari, di Internet, ... l'insieme convesso dei vincoli  $\mathbb{K}$  si presenta in questa forma (vedi [1], [4]):

$$\mathbb{K} = \left\{ x \in L^2([0, T], \mathbb{R}^q) : x(t) \geq 0 \text{ q.o. in } [0, T], \right. \\ \left. \sum_{i=1}^q \xi_{ji} x_i(t) = \rho_j(t), j = 1, \dots, l \text{ q.o. in } [0, T], \xi_{ji} \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, q\} \right\},$$

se ogni indice  $i$  è tale che esiste un indice  $j^*$  per cui accade  $\xi_{j^*i} = 1$  e  $\xi_{ji} = 0 \forall j \neq j^*$ . Se definiamo la matrice  $\Phi = \{\xi_{ji}\}_{\substack{j=1, \dots, l \\ i=1, \dots, q}}$  e il vettore  $\rho(t) = [\rho_1(t), \dots, \rho_l(t)]^T$ , allora, per brevità, i vincoli  $\sum_{i=1}^q \xi_{ji} x_i(t) = \rho_j(t), j = 1, \dots, l, \text{ q.o. in } [0, T]$  si possono anche scrivere come  $\Phi x(t) = \rho(t) \text{ q.o. in } [0, T]$ . In [31], utilizzando i risultati precedenti, si dimostra il seguente teorema.

**Teor. 2.** *Cosideriamo il problema di ottimizzazione*

$$\min_{x \in \mathbb{K}} f(x) = f(x^0)$$

dove  $f : L^2([0, T], \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale convesso e differenziabile secondo Gâteaux. Allora, esistono i moltiplicatori di Lagrange  $\bar{\lambda} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^q), \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\mu} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^l)$  tali che il punto  $(x_0, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  sia punto di sella della funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^q \int_0^T \lambda_i(t) x_i(t) dt - \sum_{j=1}^l \int_0^T \mu_j(t) \left( \sum_{i=1}^q \xi_{ji} x_i(t) - \rho_j(t) \right) dt \\ = f(x) - \int_0^T \langle \lambda(t), x(t) \rangle_q dt - \int_0^T \langle \mu(t), \sum_{i=1}^q \xi_{ji} x_i(t) - \rho_j(t) \rangle_l dt,$$

$x \in L^2([0, T], \mathbb{R}^q)$ ,  $\lambda \in L^2([0, T], \mathbb{R}^q)$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \in L^2([0, T], \mathbb{R}^l)$  e

$$\int_0^T \langle \bar{\lambda}(t), x^0(t) \rangle_q dt = 0,$$

cioè  $\bar{\lambda}_i(t), x_i^0(t) = 0 \forall i = 1, \dots, q$ , *q.o.* in  $[0, T]$ .

Poiché l'interno dell'insieme  $\mathbb{K}$  è vuoto, per provare il risultato precedente, si usa il concetto di interno quasi-relativo.

Nel libro [2] la Prof.ssa Daniele presenta le reti dinamiche e il loro studio mediante disequazioni variazionali di evoluzione. Per la descrizione del volume allega la recensione pubblicata su MathSciNet.

La Prof.ssa Daniele sta continuando a studiare le tematiche fino ad ora considerate, allo scopo di generalizzare i risultati ottenuti e applicarli ai problemi concreti.

Publications results for "Author=(daniele)"

**MR2273417 (2008e:49002)**

[Daniele, Patrizia\(I-CATN-MI\)](#)

Dynamic networks and evolutionary variational inequalities.

[New Dimensions in Networks](#). *Edward Elgar Publishing Limited, Cheltenham*, 2006. xii+253 pp. ISBN: 978-1-84376-929-3; 1-84376-929-8

[49-02 \(49J40 90B10 91B50\)](#)

### Citations

From References: 0

From Reviews: 0

Networks play a major role in theoretical issues of a variety of research areas and in many practical aspects of modern life. This book deals with dynamic networks, i.e., networks such that (i) the structure is time-invariant but (ii) the phenomena (economical, physical, etc.) occurring in them vary with time. This is the case, e.g., with traffic models and their travel demands and with financial models and their investments in assets and liabilities. The second ingredient of the book is evolutionary variational inequalities.

The book's scope consists in developing the strict connection between equilibrium problems in dynamic networks and evolutionary variational inequalities. This is accomplished by a recipe that focuses on the so-called user-optimization approach, in which each user aims at minimizing his personal cost: he tries to obtain an equilibrium that nobody is interested in changing. The point is the following: time-dependent equilibrium conditions can be expressed in terms of evolutionary variational inequalities and the latter provide solution methodologies. Time-dependent variational inequalities were introduced by J.-L. Lions and G. Stampacchia [Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493--519; [MR0216344 \(35 \#7178\)](#)]. The theory of such inequalities for traffic equilibrium networks was first developed by P. Daniele, A. Maugeri and W. Oettli [C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 9, 1059--1062; [MR1647182 \(99g:90041\)](#); J. Optim. Theory Appl. **103** (1999), no. 3, 543--555; [MR1727254 \(2000g:90008\)](#); A. Maugeri, *Matematiche (Catania)* **49** (1994), no. 2, 305--312 (1995); [MR1397308 \(97i:90103\)](#)], and F. Raciti [in *Equilibrium problems and variational models (Erice, 2000)*, 369--377, Kluwer Acad. Publ., Norwell, MA, 2003; [MR2043482 \(2004k:90012\)](#); Appl. Math. Lett. **17** (2004), no. 2, 153--158; [MR2034761 \(2004j:49024\)](#); J. Optim. Theory Appl. **122** (2004), no. 2, 387--403; [MR2093849 \(2005e:91064\)](#)].

The "ambient space" for the flow trajectories is the Lebesgue space  $L^p([0,T], \mathbb{R}^q)$ ; the equilibrium solution is shown to be a trajectory belonging to such a space. This brings into play an infinite-

dimensional context and requires tools from functional analysis.

Computational procedures are provided to compute solutions. To this end, various methods are considered: the direct method, the subgradient method, a discretization method, and a technique originating from projected dynamical systems theory. Finally, the sensitivity of solutions is investigated.

The book is organized into five chapters and six appendices.

Chapter 1 is an introduction to the contents of the book and the approach adopted therein. Chapters 2 through 5 have a common structure: they start with the variational formulation, then give existence theorems and discuss computational procedures, finally providing examples. Chapter 2 deals with traffic network models (the static case, the dynamic case, and models with additional constraints and retarded data). Chapter 3 focuses on the evolutionary spatial price equilibrium. Both the price formulation approach and the quantity formulation approach are used; a sensitivity analysis is made, also. Chapter 4 considers the evolutionary financial equilibrium problem (first a model with a quadratic utility function is adopted, then a model with a more general utility is considered; finally, a model including policy intervention is investigated). Chapter 5 is a self-contained treatment of projected dynamical systems theory; it emphasizes the connections between such a theory and the theory of evolutionary variational inequalities.

Appendix A gives definitions and basic properties for functions, multifunctions, and cones. Appendix B contains material on weak convergence. Appendix C is devoted to derivatives: directional derivatives, Gateaux and Fréchet derivatives, and subdifferentials. Appendix D describes basic concepts and gives definitions about variational inequalities, first in finite dimension and then in infinite dimension. Quasi-variational inequalities are recalled in Appendix E, separately for the finite-dimensional and the infinite-dimensional case. Finally, Appendix F is devoted to infinite-dimensional duality.

As mentioned in the Acknowledgments, a part of Section 4.1 appeared in [P. Daniele, in *Variational analysis and applications*, 279--299, Springer, New York, 2005; [MR2159978 \(2006d:49011\)](#)] and a part of Section 4.2 appeared in [P. Daniele, in *Innovations in financial and economic networks*, 84--109, Edward Elgar, Cheltenham, 2003].

Contents of Chapters 2--5:

Chapter 2 considers the basic traffic equilibrium problems. Transportation networks were first studied in 1920 by A. C. Pigou [*The economics of welfare*, Macmillan, London, 1920] but only later were network equilibrium problems considered. The seminal work, due to J. G. Wardrop ["Some theoretical aspects of road traffic

research", Proc. Inst. Civil Engineers, Part II **1952**, 325--378; per bibl.], appeared in 1952; in 1956 the approach presented therein was given a rigorous mathematical foundation by M. J. Beckmann, C. B. McGuire and C. B. Winsten [ *Studies in the economics of transportation*, Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1956]. In 1979, M. J. Smith [Transportation Res. Part B **13** (1979), no. 4, 295--304; [MR0551841 \(81a:90089\)](#)] showed that the equilibrium solution can be expressed via variational inequalities. The latter work represents the departure point of investigations of the traffic equilibrium problem. Delay effects and elastic models were introduced by T. L. Friesz et al. [Oper. Res. **41** (1993), no. 1, 179--191; [MR1205096 \(93j:90038\)](#)], Raciti [in *Equilibrium problems: nonsmooth optimization and variational inequality methods*, 247--253, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001; [MR2026136 \(2004j:90026\)](#)] and L. Scriali [Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), no. 10, 1541--1560; [MR2095302 \(2005h:90022\)](#)].

Theorem 2.2.1 characterizes the equilibrium by means of an evolutionary variational inequality. Corollary 2.3.1 gives three sufficient conditions for the existence of a solution. To make the model more realistic, traffic controls (modelling, e.g., traffic lights and one-way paths) are considered in Section 2.4. Theorem 2.4.1 gives a characterization of the equilibrium problem in this more general setting. As to the calculation of the solution, two approaches are considered in Section 2.5: the subgradient method and a discretization procedure.

Section 2.6 considers delay effects in traffic models. The motivation is the following: the network users require some time to adjust their paths, since the information travels in the network at a finite speed. Correspondingly, one has a "retarded equilibrium flow", which in Theorem 2.6.1 is characterized by means of a variational formulation. Sufficient conditions for the existence of a solution are given in Theorem 2.6.3.

Chapter 3 includes the presence of supplies and deals with two approaches to this problem: the price formulation (Section 3.1) and the quantity formulation (Section 3.2).

The price formulation is first considered in the static case, to obtain some hints useful in facing the dynamic case. The model considers a single commodity produced at  $n$  supply markets (each with a supply price) and consumed at  $m$  demand markets (each with a demand price). For each supply market there is a total supply and for each demand market there is a total demand. A transportation cost is associated with a unit of commodity transported between each supply-market pair. Upper bounds on the transportation flows are included. The model is called the "disequilibrium model", to emphasize the presence of supply and demand excesses.

Theorem 3.1.1 characterizes the equilibrium of the static model in terms of variational inequalities. Theorem 3.1.3 gives a characterization of the solution to the variational inequality as a saddle point of a suitably-defined Lagrangian. For the dynamic case, a characterization is provided in Theorem 3.1.4; three different conditions are given, guaranteeing the existence of a solution to the variational inequality associated with the spatially-distributed market problem. Computational procedures (direct method and discretization method) are considered for an example in Section 3.1.3.

The quantity formulation is used in Section 3.2, where it is shown that the time-dependent equilibrium conditions can be incorporated directly into an evolutionary variational inequality, for which an existence theorem is proved. Theorem 3.2.1 provides the characterization of the time-dependent market equilibrium in terms of a variational inequality. Three different sufficient conditions for the existence of a solution are given in Theorem 3.2.2. A sensitivity analysis of the model is stated in Theorem 3.2.3.

The last part of the chapter (Section 3.3) is devoted to the economic model for demand-supply markets.

Chapter 4 proposes a model that allows for time-dependent variance-covariance matrices associated with risk perception, financial volumes held by the sectors, optimal portfolio compositions, and instrument prices. The model takes the hint from previous work by A. Nagurney, J. Dong and M. Hughes [Optimization **26** (1992), no. 3-4, 339--354; [MR1236617 \(94h:90009\)](#)] but, instead of modeling the dynamics by using the projected dynamical systems theory, as done therein, it exploits evolutionary variational inequalities, which have an infinite-dimensional nature.

For a quadratic utility function, Section 4.1 states the model and gives equilibrium conditions, the variational inequality formulation, theoretical results, and a computational procedure. In particular, Theorems 4.1.2 and 4.1.5 are a characterization and an existence result, respectively. Section 4.2 deals with the same issues for a more general utility function. Theorems 4.2.2 and 4.2.5 are the corresponding characterization and existence results. Section 4.3 incorporates, into the model of Section 4.2, policy interventions, i.e., taxes and price controls. Theorem 4.3.4 is a characterization result. Section 4.4 illustrates a numerical example of a financial nature, which presents the important feature that the variance-covariance matrices, the lower and upper bounds on the prices of the financial instruments, and the financial volumes held by a sector can be all time-varying.

Chapter 5 is devoted to the theory of Projected Dynamical Systems (PDS), introduced in the finite-dimensional context by P. G. Dupuis and Nagurney [Ann. Oper. Res. **44** (1993), no. 1-4, 9--42;

[MR1246835 \(94k:49009\)](#)] and briefly reviewed in Section 5.1.

Section 5.2 turns to the infinite-dimensional framework and proves the equivalence between the solutions to an evolutionary variational inequality and the critical points of a projected dynamical system; the main result is Theorem 5.2.4. Section 5.3 gives a common formulation for the traffic network problem considered in Chapter 4, the quantity formulation of the spatial price equilibrium of the first part of Chapter 3, and the financial equilibrium problem of Chapter 4.

The theory of PDS is developed in Section 5.4; Proposition 5.4.2 is a uniqueness result that requires less restrictive assumptions than those previously existing in the literature. Section 5.5 formalizes via Theorem 5.5.1 the relationship between the "large-scale dynamics" of the evolutionary variational inequalities and the "small-scale dynamics" of the PDS. A computational procedure is addressed in Section 5.6.

Finally, Section 5.7 presents some numerical examples from transportation science, solved through the direct method and/or the discretization procedure.

Reviewed by [Marcello Sanguineti](#)

© Copyright 2008, [American Mathematical Society](#)

[Privacy Statement](#)



American Mathematical Society  
201 Charles Street  
Providence, RI 02904-2294